Title	Reguläre Anfangszahl mit limeszahlindex 二就テ
Author(s)	黒田, 成勝
Citation	全国紙上数学談話会. 57 p.19-p.23
Issue Date	1935-09-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74121
rights	
Note	

199. Reguläre Anfangszahl mit Limeszahlindex ニ就テ

黒田成勝（東京女高師）

標題ニ掲ゲタ順序數ガ集合論デ取扱ハレテヰルニモ拘ラズ、更ニ又コノ種ノ數ヲ考ヘルコトガ矛盾ノ誘因ニナルトハ考ヘラレナイニモ拘ラズ、コノ數ノ存在ヲ主張出來ルヤウナ集合論ノ公理系ガ見當リマセン。ドコカニアリマシタラ御教示願ヒタイ次第デス。

ソレデコノ數ガ存在スルヤウニ集合領域ヲ擴張スルニハ Zermelo, Grenzzahlen und Mengenbereich (Fund. Math. 16, 1930) ニ關聯シテ次ノヤウナコトガ考ヘラレマス。先ヅ書クノ便宜ノタメニヨク知ラレテヰル言葉ノ定義カラ始メタク思ヒマス。以下ギリシヤ字ハ皆順序數。

I、α, β, $\beta<\alpha$ ガ極限數デアルトキ，適當ナ順序數ノ列

$$\rho_0, \rho_1, \cdots\cdots \rho_\nu, \cdots\cdots\cdots, \nu<\beta,$$

ニ對シテ

$$\lim_{\nu<\beta} \rho_\nu = \alpha$$

トナルナラバ α ハ β ト *konfinal* デアルト云フ。

II. 自分自身トノミ *konfinal* デアル數ヲ *regulär* ト云フ（例ヘバ ω）。

III. 超限順序數ヲ數ノ類ニ分ツテ各類ノ *Anfangszahl* ヲ大キサノ順ニ

$$\omega,\ \omega_1,\ \cdots\cdots\ \omega_\omega,\ \cdots\cdots\ \omega_{\omega_1}\ \cdots\cdots\ \omega_{\omega_\omega}\ \cdots\cdots$$

トナルトキ、ω ノ *Index* ガ *Limeszahl* デアルヤウナ *reguläre Anfangszahl* ヲ *Reguläre Anfangszahl mit Limeszahl Index* 又ハ *excorbitante Zahl* ト云フ。

Excorbitante Zahl ガ存在スルヤウニスルタメニ *Zermelo-Fraenkel-v. Neumann* ノ公理系ニ次ノ公理ヲツケ加ヘル。

IV. 任意ノ集合 m ニ對シテ次ノ條件ヲ滿足スル集合 M ガ少クトモ一ツハ存在スル。

i) $m \in M$,

ii) $a \in M$ ナラバ

イ) *Potenzmenge* $\mathfrak{U}a \in M$,

ロ) *Vereinigungsmenge* $\mathfrak{S}a \in M$,

ハ) *Aussonderungsmenge* $a_{\mathfrak{A}(x)} \in M$,

$\Longrightarrow$ Ersetzungsmenge $\mathfrak{M}(f(x); x \in a) \in M$.

結局IVハZermeloノMengenbereichト同ジヤウナモノガ更ニMengeトシテ含マレルBereichヲ規定スル作用ヲスルワケデス。

ソコデIVニ於ケル性質ヲ有スル一ツノMヲ考ヘル、集合xヲMノ任意ノ元トシxニ對スルAnfangszahlヲω_ξトスル：$|x| = |\omega_\xi|$.（$|x|$ハ集合xノ計量數、又順序數ヲHessenberg-v. Neumannニ從ッテSubsumtionニヨッテ定義シテ置ク、即チ

$0,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\}, \cdots\cdots \omega = \{0, 1, 2, \cdots\cdots\} \cdots\cdots$

從ッテ順序數αヨリ小サイ順序數ノ集合$W_\alpha = \alpha$デアル）、カウシテMノ任意ノ元xニ順序數$\omega_\xi = \varphi(x)$ヲ對應サセレバErsetzungsaxiomニヨッテ集合

$$N = \mathfrak{M}(\varphi(x); x \in M)$$

ガ得ラレル．Mニハ最大ノMächtigkeitノ集合ガナイカラ（IV., ii), イ)）Nニモ最大數ガナイ、ソコデ

$$(1) \quad \lim_{\xi \in N} \xi = \pi$$

トスル、然ラバπハAnfangszahlノ極限トシテ矢張リAnfangszahlデアル、而モπハexorbitantデアル、如何ニモ篩一ニハπガ$\rho < \pi$トkonfinalデアッタトスルト

$$(2) \quad \lim_{\nu < \rho} \alpha_\nu = \pi$$

ナル數列 $\alpha_\nu, \nu<\rho$, ガ存在スル。ソシテ $\alpha_\nu<\pi$ デアルカラ α_ν ハ M ニ屬ス（ソレハ $\alpha_\nu<\pi$ ナラ (1) ニヨツテ $\alpha_\nu<\xi<\pi$, $\xi\in N$ ナル ξ ガアリ、且ツ N ノ元ハソノ定義ト IV, ii), ニ) トニヨツテ M ノ元、從ツテ ξ ノ截片 α_ν ハ IV, ii), ハ) ニヨツテ M ノ元デアル）。同樣ニ $\rho<\pi$ カラ $\rho\in M$、從ツテ IV, ii), ニ) ニヨツテ

$$A=\mathfrak{M}(\alpha_\nu;\ \nu\in\rho)$$

ガ, 從ツテ IV, ii), ロ) ニヨツテ γA ガ M ニ屬ス、然ルニ (2) ニヨツテ

$$\gamma A=\pi$$

故ニ π ガ M ニ屬ス、從ツテ N ニ屬ス。併シソレハ (1) ニ反スル、故ニ π ハ *regulär* デアル。第二ニハ $\pi=\omega_{\alpha+1}$ トスレバ $\omega_\alpha<\pi$ デアルカラ ω_α ガ, 從ツテ $\mathfrak{U}\omega_\alpha$ ガ M ニ屬ス、ソシテ

$$|\mathfrak{U}\omega_\alpha|>|\omega_\alpha|,$$
$$|\mathfrak{U}\omega_\alpha|\geqq|\omega_{\alpha+1}|=|\pi|$$

從ツテ π ガ N ニ屬スコトニナリ (1) ニ反スル、故ニ π ハ *Limeszahlindex* ヲ持ツタ *Anfangszahl* デアル。

Exorbitante Zahl ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ要求スルノナラ IV ニ於テ「任意ノ集合 m ニ對シテ」ハ不要ナワケデス、實ハ凡テノ *excorbitante Zahl* ヲ元トスル集合ガ存在シナイ程非常ニ多クノ *excorbitante*

Zahl が存在シテモライタイノデ「任意ノ------」ヲツケタ次第デス、ソレハ IV. ニ於テ任意ノ順序数 α ヲ m ニトレバ，α ニ對スル M ニ對應スル *Anfangszahl* π ハ α ヨリ大キクナリ、從ッテ如何程デモ大キイ *excorbitante Zahl* が存在スルコトニナリマス。從ッテ凡テノ *excorbitante Zahl* ノ「集合」ハ「發散」シテ集合デハアリ得ナイコトニナリマス。

以上ハ大体ノ考デ大ザッパデスが，公理カラ精密ニ當ッテ見テ意外ナ困難ニ遭遇スルコトがナケレバ *excorbitante Zahl* が *Mengenbereich* ニ這入ッテ來ルダラウト思ヒマス。但シ IV. ハ多スギルコトヲ假定シテヰルカモ知レマセンシ又 IV ハ他ノ公理ト非常ニ趣ヲ異ニシテヰルノデソノ点モ問題カモ知レマセン。集合ヲ無暗ニ廣クスルト例ノ矛盾が起リマスが IV ニヨッテ擴ゲテモ大丈夫ダト考ヘマス。

本會 192. *Wohlordnungssatz* ノ一証明ニ於テ $\alpha(0)=0$ ト置キマシタが $\alpha(0)=\alpha(m)$ ト置イタ方が遥ニ *natural* デシタ。サウスレバ $f(\xi)$ が m ノ元デアルコトニ、サウ神經質ニナラズニスンダノデシタ、又集合 $m-n$ ハ m ニ屬シテ n ニ屬サヌ元ノ集合デスが 192 デハ必ズシモ $m \geqq n$ デハナイノデソノ点モ好都合ニナリマス。